STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

ZW 1949-015

Een opmerking over vrije algebra's

W. Peremans

1949

Een opmerking over vrije algebra's.

door W. Peremans.

Deze opmerking heeft betrekking op de behandeling van het begrip vrije algebra zoals dit wordt ontwikkeld in de tweede druk van de "Lattice Theory" van G. Birkhoff (Foreword on algebra).

Birkhoff definieert een abstracte algebra als een verzameling waarop een aantal operatoren gedefinieerd zijn. Deze operatoren zijn eenwaardige functies van een eindig aantal veranderlijken, gedefinieerd op de algebra en waarvan de functiewaarde ook tot de algebra behoort. De machtigheid van de verzameling operatoren behoeft niet eindig te zijn. Op grond hiervan worden op de bekende wijze de begrippen subalgebra, homomorfie, isomorfie, direct product, subalgebra voortgebracht door een deelverzameling enz. gedefinieerd. We noemen algebra's met dezelfde operatoren gelijksoortig.

Voor de definitie van het begrip "vrije algebra" gaat Birkhoff uit van een willekeurige klasse gelijksoortige algebra's en verder van een cardinaalgetal n, en definieert zijn vrije algebra door de eis, dat zij door n elementen moet zijn voortgebracht en dat iedere toevoeging aan de voortbrengende elementen van de vrije algebra van elementen uit een algebra uit de klasse uitgebreid kan worden tot een homomorfie van de vrije algebra op een deelalgebra van die algebra uit de klasse. Op deze definitie laat hij een eenduidigheids- en een existentiebewijs volgen. Het eenduidigheidsbewijs is evenwel naar mijn mening onjuist, omdat er ten onrechte in verondersteld wordt, dat de vrije algebra zelf behoort tot de klasse van algebra's, waarvan men was uitgegaan, of althans met een van de algebra's uit die klasse isomorf is.

Passen we nu Birkhoff's methode eens toe op de groepentheorie en wel op een onhandige, maar geoorloofde manier. We vatten een groep op als een algebra met één binaire operator (vermenigvuldiging). De groep is hierdoor als groep volledig bepaald. De klasse is de klasse van alle groepen (Op moeilijkheden, die kunnen ontstaan door het paradoxale karakter van dit laatste begrip ga ik evenmin als Birkhoff in. Zij zijn zonder veel moeite te vermijden). We nemen verder $n = 1$; noem de voortbrengende a. Nu voldoen de positieve machten van a, dus $a, a^2, a^3, \ldots,$ waarbij de vermenigvuldiging op de gewone wijze door exponentenoptelling wordt gedefinieerd, aan de eisen van Birkhoff. Allereerst is het een algebra met één binaire operator (een multiplicatief systeem) en de afbeelding van a op een element α van een groep is onmiddellijk uit te breiden tot een homomorfe afbeelding van de machten van a op die van α.

De vrije algebra is evenwel geen groep.

Het is nu ook duidelijk, waarom het eenduidigheidsbewijs mislukt. Het bewijs berust op een wederzijdse afbeelding van de voortbrengende elementen van de twee vrije algebra's, die dan tot een tweezijdige homomorfie van de hele algebra's uit te breiden is, waarna het evident is dat de tweezijdige homomorfie een isomorfie is. Deze uitbreiding tot de hele algebra is echter alleen dan mogelijk, als de algebra's inderdaad zelf tot de klasse behoren want alleen dan wordt de mogelijkheid van een dergelijke uitbreiding in de definitie van een vrije algebra gepostuleerd.

We kunnen aan het zoëven genoemde voorbeeld ook makkelijk demonstreren, dat de eenduidigheid niet vervuld is. We nemen weer de positieve machten van a, maar a^3 twee keer; schrijf ze a^3 en $a^{3'}$. Dus $a^1, a^2, a^3, a^{3'}, a^4, a^5 \ldots\ldots$ Definitie van vermenigvuldiging

$a^m a^n = a^{m+n}$ voor $m + n \neq 3$ (met 3' wordt evenzo gerekend als met 3)

$a^2 a^1 = a^3$

$a^1 a^2 = a^{3'}$

Ook dit voorbeeld voldoet aan de vereisten (steeds worden bij de homomorfie a^3 en $a^{3'}$ op hetzelfde element α^3 afgebeeld, maar dat hindert niet) en is niet isomorf met het vorige.

Het is duidelijk, dat als men een groep opvat als een systeem met twee operatoren, n.l. vermenigvuldiging en inversevorming, de moeilijkheden alle verdwijnen, omdat dan makkelijk in te zien valt, dat iedere bijbehorende vrije algebra zelf ook een groep is en dus tot de klasse behoort en bij beperking tot algebra's, die tot de klasse behoren is het eenduidigheidsbewijs van Birkhoff natuurlijk wel geldig.

Het verdwijnen van de moeilijkheden berust hierop, dat in dat geval de klasse op een zeer bijzondere wijze gekarakteriseerd is, n.l. door axioma's die de vorm van gelijkheden bezitten (Mc Kinsey & Tarski noemen dergelijke systemen "equationally definable", Ann. of Math., 45 (1944), Appendix V). In dat geval is het duidelijk, dat deze zelfde gelijkheden ook voor de vrije algebra moeten gelden, en dus dat de vrije algebra tot de klasse behoort.

Birkhoff gebruikt in zijn boek verder ook alleen dat type van klassen en maakt terloops ook een opmerking over de op deze manier bepaalde klassen, dit laatste echter pas na zijn eenduidigheidsbewijs.

Men zou kunnen menen, dat men een oplossing voor de moeilijkheid zou kunnen verkrijgen door uitdrukkelijk aan de eisen, waaraan de vrije algebra moet voldoen, die toe te voegen, dat de vrije algebra tot de klasse behoort. Inderdaad is dan de eenduidigheid gewaarborgd, maar daarvoor in ruil raken we de existentie kwijt.

Birkhoff levert een constructief existentiebewijs van het algemene geval, dat correct is, maar geen waarborg oplevert, dat de zo geconstrueerde vrije algebra tot de klasse behoort. En inderdaad, als we zijn constructie toepassen op het tevoren genoemde geval van groepen met één voortbrengende a, dan krijgen we precies het hier gegeven voorbeeld van de positieve machten van a. Nemen we echter als klasse die, bestaande uit twee groepen G van orde 2 en G' van orde 3, dan is het duidelijk, dat er zeker geen vrije algebra met één voortbrengende bij deze klasse te vinden is, die tot de klasse behoort. Het existentiebewijs van Birkhoff is dan ook typisch afgestemd op de door vergelijkingen gedefinieerde klassen. Hij gaat n.l. uit van de voortbrengenden en vormt daaruit formules door herhaalde toepassing van de operatoren. Daarop past hij identificaties toe, als twee formules bij iedere substitutie van elementen uit een algebra van de klasse steeds gelijke elementen van die algebra opleveren. Het is dan eenvoudig aan te tonen dat het zo verkregen systeem aan de vereisten voldoet. Maar ook als men die identificaties niet of slechts ten dele toepast voldoet het!

De methode volgens welke Birkhoff het begrip vrije algebra inveert, is dus alleen bruikbaar voor door gelijkheden gedefinieerde klassen.